Uyarı: Eğer $P_{n\times n}$ singüler olmayan bir matris ve $B = P^{-1}.A.P$ şeklinde ise

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$$

A verilsin; P singüler değil

$\Leftrightarrow P = E_k . E_{k-1} \ldots E_1$

olacak şekilde E_j elementer matrisler vardır. (Aynı şekilde, P^{-1} için de geçerli.)

$P^{-1} \cdot A = F_1 . F_2 \ldots F_k . A$; $P^{-1}A$ ile A satırca denk. satır uzayları eşittir $\Rightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(P^{-1}A)$

$(P^{-1}A)$ ile $(P^{-1}A).\underbrace{E_1.E_2 \dots E_l}_{P} = (P^{-1}A).P$

sütunca denktir $\Rightarrow$ sütun uzayları eşit;

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{rank}(P^{-1}A) & = & \operatorname{rank}(P^{-1}A.P) \\ \| & & \\ \operatorname{rank}(A) & = & \operatorname{rank}(P^{-1}AP) \end{array}$$

Tanım: $L : V \to V$. n boyutlu V uzayı üzerinde bir lineer dönüşüm ise; rank(L), L yi temsil eden herhangi bir matrisin rankı olarak tanımlanır.

$$\begin{array}{ccc} & L & \\ \swarrow & & \searrow \\ [L]_S = A & & [L]_{S'} = B \end{array}$$

$$\underbrace{B}_{\text{rank}} = \underbrace{P^{-1} . A . P}_{\text{rank}}$$

$$\text{rank} = \text{rank}$$

Hatırlatma: L'nin sıfırlığı = boy çek(L)

Sonuç: $L : V \to V$ bir lineer dönüşüm,

boy $V = n$ ise

sıfırlık(L) + rank(L) = boy(V)

L'nin herhangi bir temsilcisi A ise;

sıfırlık(A) = sıfırlık(L) ve rank(A) = rank(L)

$AX = 0$ boyutu

sıfırlık(A) + rank(A) = A nın sütun sayısı

$\parallel$

sıfırlık(L) + rank(L) = boy$(V) = n$

Uyarı: Yukarıdaki önermeler $L: V \to W$ durumunda da doğrudur.

Teorem: $L: V \to W$ bir lineer dönüşüm ise, $\text{rank}(L) = \text{boy}\, L(V)$ dir.

İspat: $\text{boy}(V) = n$, $\text{boy}(W) = m$ ve $\text{boy}\, L(V) = r$ olsun.

$$\underbrace{\text{boy}\, L(V)}_{r} + \text{boy}\, \text{çek}(L) = \underbrace{\text{boy}\, V}_{n}$$

$\text{boy}\, \text{çek}(L) = n - r$ olur.

çek(L), V nin alt uzayıdır;

$C = \{v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n\}$, çek$(L)$ nin bir bazı olsun.

C'yi V uzayı için baz olacak şekilde

genişletelim; $B = \{\underbrace{v_1, v_2, \dots, v_r}, v_{r+1}, \dots, v_n\}$

V için baz olsun.

$\{L(v_1), L(v_2), \dots, L(v_r)\}$

1. $L(V)$ yi gerer: $x \in V$ ise

$x = a_1 v_1 + \; + a_r v_r + \underbrace{a_{r+1} v_{r+1} + \dots + a_n v_n}_{\text{çek}(L)\text{'de}}$

$L(x) = a_1 L(v_1) + \dots + a_r L(v_r) \Rightarrow \{L(v_1), \dots, L(v_r)\}$

$L(V)$ yi gerer.

$\{L(v_1), \ldots, L(v_r)\}$ lineer bağımsızdır:

$a_1 L(v_1) + \ldots + a_r L(v_r) = 0$ olsun;

$L(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_r v_r) = 0$

$a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r \in$ çek(L) dir

$a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r = b_1 v_{r+1} + b_2 v_{r+2} + \ldots + b_n v_n$

$\Rightarrow a_1 v_1 + \ldots + a_r v_r - b_1 v_{r+1} - \ldots - b_{n-r} v_n = 0$

$\{v_1, \ldots, v_n\}$ V nin bazıdır ve lin. bağımsız

dır. $\Rightarrow \underbrace{a_1 = a_2 = \ldots = a_r}{} = b_1 = \ldots = b_{n-r} = 0$

$\{L(v_1), \ldots, L(v_r)\}$ lin. bğsız.

$\Downarrow$

$L(V)$ için baz olur $\Rightarrow$ boy $L(V) = r =$ boy

$$\text{boy}\, L(V) + \text{boy}\, \text{sek}(L) = n = \text{boy}(V)$$

$$\text{boy}\, \text{sek}(L) = \text{sıfırlık}(L) = n - r$$

$$\text{boy}\, L(V) = r$$

$\{L(v_1), \ldots, L(v_r)\}$ $L(V)$ için bazdır.

$\{L(v_1), \ldots, L(v_r), w_{r+1}, \ldots, w_m\} = T$

şeklinde W için bir baza genişletelim.

V nin B bazı ve W nun T

bazına göre L nin temsilcisi:

$$A = \left[[L(v_1)]_T \,\vdots\, [L(v_2)]_T \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, [L(v_r)]_T \,\vdots\, \underbrace{[L(v_{r+1})]_T \ldots}_{} \right]$$

sek.

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & & 0 & \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & \\ \hline \vdots & \vdots & & 0 & \\ & & & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\text{rank}(A) = \underline{\underline{r}} = \text{boy } L(V)$ buluruz.

$$L : \begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & & L(B) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \mathcal{J} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = A$$

Tanım: A ve B, $n\times n$ tipinde ve singüler olmayan bir P matrisi için

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

ise A ve B matrisleri benzerdir denir.

<u>Teorem</u>: V n boyutlu bir vektör uzayı, A ve B $n\times n$ tipinde iki matris olsun. A ve B'nin benzer olmaları için gerek ve yeter şart A ve B nin farklı bazlara göre aynı lineer dönüşümün temsilcileri olmalarıdır.

$$L : V_{S,S'} \to V_{T,T'} \qquad [L]_{S,T} = A \quad [L]_{S',T'} = B \iff B = P^{-1}AP$$

Örnek: $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a_1 - a_3 \\ a_1 + a_2 - a_3 \\ a_3 \end{bmatrix}$

şeklinde tanımlansın. $\mathbb{R}^3$ ün standart bazına göre L nin temsilcisi

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ dir.

$S' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathbb{R}^3$ ün bir diğer sıralı baz olmak üzere, L nin (S') bazına göre temsilcisi

$$P = P_{S \leftarrow S'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Alışt.

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Örnek: $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}$ şeklinde

tanımlanıyor.

a) $\mathbb{R}^2$ nin standart bazına göre L nin temsilcisi?

b) $\mathbb{R}^2$ nin $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ bazına göre —— " —— ?

c) (a) ve (b) deki matrislerin benzer olduğunu gösteriniz.

d) (a) ve (b) — " — ranklarının eşit olduğunu gösteriniz.

(a) L'nin $\mathbb{R}^2$ nin st. bazına göre temsilcisi

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \to \left[L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \to \left[L\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[L]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ $\quad L\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad L\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$a_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Big| \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right] \quad [L]_T = \begin{bmatrix} 1/3 & 4/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

c) Hangi P için $[L]_T = P^{-1} [L]_S . P$ sağlanır? ($P_{S \leftarrow T}$ bulunmalı)

$$\underbrace{a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Big| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P_{S \leftarrow T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

P^{-1} için: $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim$

$$\overset{\frac{1}{3} S_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right] \overset{-S_2+S_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{matrix}}_{P^{-1}}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 2/3 & 1 & -1/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \end{matrix}\bigg]}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/3 & 4/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} = B$$

$B = P^{-1} . A . P \iff$ A ve B benzerdir,

$\iff$ V nin iki bazına göre aynı lineer dönüşümün temsilcileridir.

Örnek: $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ ve $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

sırasıyla $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^2$ nin sıralı bazları olsun.

Bu bazlara göre temsilcisi $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

olan lineer dönüşüm L olsun. L nin $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{R}^2$ nin standart bazlarına göre temsilcisini bulunuz.

$[L]_{S,T} = A$, $S' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ve

$T' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ olmak üzere

$[L]_{S',T'} = B = ?$

$B = Q^{-1} A P \; ; \; P = P_{S \leftarrow S'}$

$Q = Q_{T \leftarrow T'}$

$P_{S \leftarrow S'}$ için: $a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{2} S_2}{\overset{S_1+S_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\frac{1}{4} \cdot S_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{array}\right] \underset{-S_3+S_2}{\overset{-S_3+S_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 0 & 1/4 \end{array}\right]$$

where the right-hand block $\begin{bmatrix} 3/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$ is P (written as $\underbrace{}_{P}$).

Q^{-1} için: $Q = Q_{T \leftarrow T'}$

$Q^{-1} = Q_{T' \leftarrow T}$

$$\underbrace{a_1 \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} \;\Big|\; \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}$$

$$B = Q^{-1}\cdot A\cdot P = \begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\3 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\-1 & 2 & -1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{4}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix}10 & -2 & 2\\8 & 2 & -4\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix}18 & 0 & -2\\6 & 6 & -10\end{bmatrix} = B.$$

$$\operatorname{rank}\Big(\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{A}\Big)$$ için : 1) A'yı satır eşelon biçime indirge;

2) İndirgenmiş matriste 0'dan farklı satırların sayısı ranktır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \underset{-S_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{rank} = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \quad \underset{3S_2 \to S_2}{\overset{3S_1 \to S_1}{\sim}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{-2S_1 + S_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{-\frac{1}{9} \cdot S_2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ satır eşelon biçimde

$\text{rank} = 2$

$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ old. bilindiğinden (P sing. değil)

$\text{rank}(B) = \text{rank}(A)$