A köşegenleştirilebilir ise A nın özvektörleri sütunlarında bulunan P singüler olmayan matrisi için $P^{-1}AP$ köşegensel bir matristir. A reel simetrik ve özdeğerleri birbirinden farklıysa A nın özvektörleri dik bir küme oluşturur ve A köşegenleştirilebilir dir. Özvektörleri, normları 1 olacak şekilde normalize edersek $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ birim-dik bir küme elde ederiz. $P = [x_1 \mid x_2 \mid \ldots \mid x_n]$ alırsak

$$P^T = \begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_n^T \end{bmatrix}$$

olur. $P^T \cdot P$ çarpımında i. satır j. sütun elemanı $x_i^T \cdot x_j$ olur. P nin sütunları birim-dik bir küme olduğundan

$$x_i^T \cdot x_j = \begin{cases} 0 & i \neq j \text{ için} \\ 1 & i = j \text{ için} \end{cases}$$ ve

$P^T \cdot P = I_n$ buluruz. Buradan

$$P^{-1} = P^T$$

olduğu görülür.

Tanım: A $n \times n$ tipinde reel bir matris olmak üzere $A^{-1} = A^T$ ise A ya bir dik matris (ortogonal) denir. $(A^T \cdot A = I_n)$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}$

matrisi, $A^T . A = I_3$ olduğundan dik bir matristir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin özvektörleri

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ dik kümesidir. Bu kümeyi

normalize edersek $\left(x' = \frac{1}{\|x\|} . x \right)$

$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \right\}$

(Hatırlatma: x, A'nın özvektörü ise $c \in \mathbb{R}$ için $c.x$ de aynı özdeğere karşılık gelen bir özvektördür.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \quad \text{için} \quad P^T . P = I_3$$

ve $$P^{-1} A P = P^T . A . P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

Teorem: $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin dik matris olması için gerek ve yeter şart sütunlarının birim-dik bir küme oluşturmasıdır.

Teorem: A $n \times n$ tipinde reel simetrik bir matris ise $P^{-1} A P = P^T . A . P = D$ köşegensel matris olacak şekilde bir P dik matrisi vardır. A nın özdeğerleri D nin esas köşegeni üzerindeki terimlerdir.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin karakteristik polinomu $p(\lambda) = (\lambda+2)^2 . (\lambda - 4)$ ve özdeğerleri $\lambda_{1,2} = -2$, $\lambda_3 = 4$ tür.

Özvektörler:

$\lambda_{1,2} = -2$ için: $(\lambda I - A)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = -x_2 - x_3$; $\quad x_2 = t,\ x_3 = s$ için $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ t \\ s \end{bmatrix}$

$$= s.\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t.\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda = -2$ için özvektörler:

$$\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} \right\}$$

Bu kümeden birim-dik bir küme elde etmek için Gram-Schmidt alg. uygulanır.

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} . w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} . \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix} \qquad \frac{1}{2}+1$$

$$w_1' = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad w_2' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 4$ e karşılık gelen özvektör:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{4}S_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} 2S_1+S_2 \\ 2S_1+S_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_2 = x_3$, $x_3 = s$ için $x_2 = s$

$$x_1 = \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = s$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Özvektör: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Özvektör olarak kümenin birimleştirilmesiyle $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ alırız.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

ortogonal bir matristir;

$$P^T . A . P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

reel simetrik matrisini köşegenleştirecek P dik matrisini ve benzer olduğu köşegensel matrisi bulunuz.

Özdeğerler: $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$

$= \left[(\lambda-1)^2 - 4\right]^2 = (\lambda^2 - 2\lambda - 3)^2 = (\lambda-3)^2(\lambda+1)^2$

$\lambda_{1,2} = 3 \quad , \quad \lambda_{3,4} = -1$

$\lambda_{1,2} = 3$ için özvektörler: $(\lambda I - A)x = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = x_2$ ve $x_3 = x_4$ $\quad$ $x_2 = s$, $x_4 = t$ için

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \\ t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2 \cdot w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 = v_2 \Rightarrow \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\}$$

$\lambda_{3,4} = -1$ için: $(\lambda I - A)x = 0$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = -x_2$, $x_2 = s$ olsun.

$x_3 = -x_4$, $x_4 = t$ olsun

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ -t \\ t \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1' = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$P^T \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = D$$

Bir A matrisini köşegenleştirirken:

Adım 1) A'nın karakteristik polinomu

Adım 2) K. polinomun kökleri (özdeğerler)

Adım 3) Özdeğerlere karşılık gelen özvektörler bulunur

Adım 4) Cebirsel katlılığı k_j olan λ_j özdeğerine karşılık k_j lineer bağımsız özvektör bulunabilirse. A köşegenleştirilebilir

Adım 5) Bulunan özvektörlerin sütunlarını oluşturduğu P için $P^{-1}. A. P = D$ köşegensel matrisini verir. D nin esas köşegeni üzerindeki değerler özdeğerlerdir.

Örnek: $A=\begin{bmatrix}0&-1&-1\\-1&0&-1\\-1&-1&0\end{bmatrix}$ matrisini köşegenleştirecek P dik matrisini bulunuz. $P^TAP=D$ köşegensel matrisini yazınız.

Özdeğerler: $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}\begin{array}{l}-\lambda.S_2+S_1\\ =\\ -S_2+S_3\end{array}$

$$=\begin{vmatrix}0&1-\lambda^2&1-\lambda\\1&\lambda&1\\0&1-\lambda&\lambda-1\end{vmatrix}\underset{\text{1. sütun kof.}}{=}1.\underbrace{(-1)^{2+1}}.\begin{vmatrix}1-\lambda^2&1-\lambda\\1-\lambda&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(-1).\left[(1-\lambda^2)(\lambda-1)-(1-\lambda)^2\right]=\underbrace{(1-\lambda)^2\left(-\lambda-1-1\right)(-1).}$$

$$=(1-\lambda)^2(\lambda+2)$$

Özdeğerler: $\lambda_{1,2}=1,\ \lambda_3=-2.$

$$\lambda = (-1)\cdot\left((1-\lambda)(1+\lambda)\cdot(\lambda-1) - \underbrace{(1-\lambda)^2}\right)$$

$$= (-1)\cdot(1-\lambda^2)\left(-(1+\lambda)-1\right)$$

$$= (1-\lambda^2)\cdot(\lambda+2)$$

$$= (-1)\cdot\left[(1-\lambda^2)(\lambda-1) - (1-\lambda)^2\right] = \underbrace{(1-\lambda)^2\left(-\lambda-1-1\right)(-1)\cdot}$$

$$= (1-\lambda)^2(\lambda+2)$$

Özdeğerler: $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = -2$.

Özvektörler: $\lambda_{1,2}=1$ için: $(\lambda I - A)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = -x_2 - x_3$; $x_2 = s$ ve $x_3 = t$ için $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{bmatrix}$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1' = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z_2' = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = -2$ için: $(\lambda I - A)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \underset{}{\overset{S_1 \leftrightarrow S_3}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_2 = x_3$, $x_3 = s$ için

$x_1 = -x_2 + 2x_3 = s$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3}$$

$$w_3' = \frac{1}{\|v_3\|} \cdot v_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$ dik bir matris,

$$P^T \cdot A \cdot P = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$