A $n \times n$ köşegenleştirilebilir $\Leftrightarrow$ A nın $\mathbb{R}^n$ e baz olan bir özvektör kümesi vardır.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ köşegenleştirilebilir midir?

Özdeğerler için: $|\lambda I - A| = 0$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \quad \lambda_{1,2} = 1$$

$\lambda = 1$ in özvektörleri için

$(\lambda I - A)x = 0$ $\quad \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$ $x_2 = 0$, $x_1 =$ serbest;

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ tek özvektör; $\mathbb{R}^2$ için baz değil;

A köşegenleştirilemez.

Örnek: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ köşegenleştirilebilir mi?

Özdeğerler için: $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \underbrace{\lambda^2 + 1 = 0}$

$\mathbb{R}$ üzerinde çözümü yoktur; özdeğerler reel değil; $\mathbb{R}$ üzerinde köşegenleştirilebilir değildir.

Kompleks sayılar cismi üzerinde:

$\lambda^2 + 1 = 0 \iff \lambda_1 = -i$ ve $\lambda_2 = i$

$\lambda_1 = -i$ ye karşılık özvektörler:

$(\lambda_1 I - A)\, x = 0$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ -i & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{i.S_1+S_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = i.x_2$, $x_2 = s$ dersek $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1}$

$\lambda = i$ için özvektörler:

$$\left[\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{-i.S_1+S_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = -i.x_2$, $x_2 = t$ için $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$

Özvektör kümesi $= \left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ lin. bağsız. $\mathbb{R}^2$ için bir baz olur. $\Rightarrow$ A köşegenleştirilebilirdir. (Kompleks sayılar üzerinde)

$P = [v_1 \mid v_2] = \begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ için $P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$

$\downarrow \quad \lambda_1 = -i$ $\quad \downarrow \quad \lambda_2 = i$

(Sağlaması ödev)

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ köşegenleştirilebilir midir?

Özdeğerler: $|\lambda I - A| = \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}} = \lambda.(\lambda-1)^2 = 0$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 1$

Özvektörler: $\lambda_1 = 0$ için $(\lambda I - A)x = 0$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 =$ serbest

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1}$

$\lambda_{2,3} = \underline{1}$ için:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 =$ serbest

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2}$$

$\{v_1, v_2\}$ 3 boyutlu $\mathbb{R}^3$ için baz olamaz

$\Rightarrow$ A köşegenleştirilemez.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}}_{} =$$

Örnek: $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisi köşegenleştirilebilir midir?

Özdeğerler: $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda.(\lambda-1)^2 = 0$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 1$

Özvektörler: $\lambda_1 = 0$ için $(\lambda I - A)x = 0$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$ $x_2 = 0$, $x_1 = -x_3$

$x_3 = s$ için

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s.\underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1}$

$\lambda_{2,3}=1$ için $(\lambda I - A)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 \text{ ve } x_3 \text{ serbest}$$

$\cancel{x_2 = x_3 = s \quad (?)}$

$x_2 = s \quad x_3 = t \quad (?)(\checkmark)$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}^{v_2} + t \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}^{v_3}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

Özvektör kümesi $= \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ R^3 için bir bazdır (Alıştırma). Böylece A köşegenleştirilebilirdir.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere;}$$

$0, 1, 1 \rightarrow$ özdeğerler

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ olur. (Alıştırma)

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Örnek: Özdeğerleri 2 ve −3; ve bunlara karşılık gelen özvektörleri $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ olan, köşegensel olmayan bir $A_{2\times2}$ matrisi bulunuz.

A nın özvektör kümesi $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\mathbb{R}^2$ için bir baz olduğundan A köşegenleştirilebilirdir.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ için } \quad P^{-1}.A.P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 2$ $\quad$ $\lambda = -3$

$$\Rightarrow \quad A = P.\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.P^{-1}$$

P^{-1} için : $\left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{-S_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\overset{-2S_1+S_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{3}\cdot S_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right]$

$\overset{S_2+S_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1/3 \end{array}\right]$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P.D.P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -10 & 1 \end{bmatrix} = A$$

(Sağlaması Alıştırma)

Önceki A için A^{1001} matrisini hesaplayınız.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ için } P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(P^{-1} A P)^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{bmatrix}$$

$$(P^{-1} A P)^{1001} = \begin{bmatrix} 2^{1001} & 0 \\ 0 & (-3)^{1001} \end{bmatrix}$$

$$(P^{-1} A P)^{1001} = \underbrace{P^{-1} A \cancel{P} \cdot \cancel{P^{-1}} A \cancel{P} \cdot / \cdots / \cancel{P^{-1}} A P}_{1001.\ \text{terim}}$$

$$= P^{-1} \cdot A^{1001} \cdot P^{1001}$$

$$P^{-1} \cdot A^{1001} \cdot P = \begin{bmatrix} 2^{1001} & 0 \\ 0 & (-3)^{1001} \end{bmatrix}$$

$$A^{1001} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{P} \cdot \begin{bmatrix} 2^{1001} & 0 \\ 0 & (-3)^{1001} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}}$$

$$= \begin{bmatrix} -(2^{1001}) & (-3)^{1001} \\ 2^{1002} & (-3)^{1001} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2^{1001} + 2 \cdot (-3)^{1001} & -(2^{1001}) + (-3)^{1001} \\ -2^{1002} + 2(-3)^{1001} & 2^{1002} + (-3)^{1001} \end{bmatrix}$$

Teorem: $n \times n$ tipindeki A matrisinin özdeğerleri reel ve hepsi birbirinden farklı ise A köşegenleştirilebilirdir. (A nın n tane farklı ve reel özdeğeri var.)

İspat: A nın özdeğerleri: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ve birbirinden farklı olsun. Özdeğerlere karşılık gelen öz-vektörler sırasıyla $v_1, v_2, \ldots, v_n$ olsun.

İddia: $\{v_1, \ldots, v_n\}$ lineer bağımsızdır.

Diyelim ki $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ lineer bağımlı.

$j \geq 2$ olmak üzere öyle bir v_j vardır ki kendisinden önce gelen vektörlerin bir lineer birleşimidir. k bu özelliği sağlayan en küçük indis olsun.

$$v_k = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_{k-1} \cdot v_{k-1} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\underbrace{A \cdot v_k} = a_1 \cdot Av_1 + a_2 \cdot Av_2 + \ldots + a_{k-1} \cdot A \cdot v_{k-1}$$

$$\lambda_k \cdot v_k = a_1 \cdot \lambda_1 v_1 + a_2 \cdot \lambda_2 v_2 + \ldots + a_{k-1} \, \lambda_{k-1} \cdot v_{k-1} \ldots (2)$$

(1)'i $(-\lambda_k)$ ile çarpıp (2) ile toplarsak;

$$\vec{0} = a_1 \cdot v_1 \cdot (-\lambda_k + \lambda_1) + a_2 v_2 (-\lambda_k + \lambda_2) + \ldots + a_{k-1} v_{k-1} (-\lambda + \lambda_{k-1})$$

$v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ lineer bağımsızdır;

çünkü lineer bağımlı olsa; bir $j \geq 2$ için

$$v_j = b_1 v_1 + \ldots + b_{j-1} v_{j-1} \quad (j \leq (k-1))$$

olacak şekilde $b_1, \ldots, b_{j-1}$ katsayıları vardır.

$$\vec{0} = a_1 \cdot v_1 (-\lambda_k + \lambda_1) + a_2 v_2 (-\lambda_k + \lambda_2) + \ldots + a_{k-1} v_{k-1} (-\lambda + \lambda_{k-1}) \quad \ldots \quad (3)$$

Yukarda k yı bu eşitliği sağlayan en küçük indis olarak aldığımızdan; böyle bir j yoktur $\Rightarrow$ $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ lineer bağımsızdır

$\Rightarrow$ her i için (3) teki katsayılar

$$a_i \cdot (\lambda_i - \lambda_k) = 0$$

$$a_i(\underbrace{\lambda_i - \lambda_k}_{\neq 0}) = 0$$

$\lambda_i \neq \lambda_k$ (A nın birbirinden farklı özdeğerler)

$\Rightarrow a_i = 0 \qquad 1 \leq i \leq k-1$

$$\left(\begin{array}{c} Ax = \lambda . x \\ x \neq \vec{0} \end{array} \right)$$

$\Rightarrow v_k = a_1 v_1 + \ldots + a_{k-1} v_{k-1}$

$\Rightarrow \underline{v_k = \vec{0}}$

Bu eşitliği v_k nın özvektör olmasıyla çelişir.

$\Rightarrow$ Böyle bir k yoktur $\Rightarrow v_1, \ldots, v_n$ kümesi lineer bağımsızdır $\Rightarrow$ A nın özvektörleri $\mathbb{R}^n$ in bir bazı olur $\Rightarrow$ A köşegenleştirilebilirdir.

Örnek: $L: P_2 \to P_2$, $L(p(t)) = p'(t)$

lineer dönüşümü köşegenleştirilebilir midir?
(Herhangi bir temsilcisi köşegensel olacak şekilde P_2 nin bir bazı var mıdır? $\Leftrightarrow$
Herhangi bir baza göre elde edilen bir temsilcisi köşegenleştirilebilir midir?)
$S = \{t^2, t, 1\}$ kümesini P_2 için bir sıralı baz olarak alalım.

$$A = [L]_S = \left[[L(s_1)]_S \,\vdots\, [L(s_2)]_S \,\vdots\, [L(s_3)]_T \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$L(s_1) = 2t$ $\qquad$ $L(s_2) = 1$

$$[L(s_1)]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [L(s_2)]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [L(s_3)]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Özdeğerleri: $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -2 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = |\lambda I - A|$

$\lambda^3 = 0$, $\lambda_{1,2,3} = 0$

Özvektörler: $(\lambda I - A)x = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_3 = \text{serbest}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1}$$

Özvektör kümesi $\mathbb{R}^3$ için baz değil; A (L) köşegenleştirilemez.

Örnek: $L: P_2 \to P_2$; $L(at^2+bt+c) = a.t^2 - c$

dönüşümü köşegenleştirilebilir midir?

$S = \{t^2, t, 1\}$ sıralı bazını alalım.

$$A = [L]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

L nin bir temsilcisi köşegensel; L köşegenleştirilebilir dir. ✓

$L(t^2) = t^2 = 1.t^2 + 0.t + 0.1$

$L(t) = 0 = 0.t^2 + 0.t + 0.1$

$L(1) = -1 = 0.t^2 + 0.t + (-1).1$