Tanım: A nxn tipinde ve karakteristik polinomunun bir λ_1 kökünün katlılığı r ise λ_1 in cebirsel katlılığı r dir deriz.

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^r \cdot q(\lambda) \quad (q(\lambda_1) \neq 0)$$

Tanım: A nxn tipinde ve λ_1 bir özdeğeri ise $(\lambda_1 I - A)x = 0$ çözüm uzayı r boyutlu ise λ_1 in geometrik katlılığı r dir deriz.

($(\lambda_1 I - A)x = 0$ sisteminin r tane lineer bağımsız çözümü vardır.)

Teorem: A $n \times n$ tipinde ve λ_1 bir özdeğeri olsun. λ_1 in geometrik katlılığı cebirsel katlılığını geçemez.

$$r_{geom} \leq r_{cebirsel}$$

İspat: A nın λ_1 e karşılık gelen özvektörleri $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ lineer bağımsız kümeyi oluştursun. Bu kümeyi $\mathbb{R}^n$ için baz olacak şekilde $T = \{x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_{n-r}\}$ genişletelim.

Bu baza göre $P = [\underbrace{x_1 \,|\, x_2 \,|\, \cdots \,|\, x_r}_{1 \leq i \leq r} \,|\, y_1 \,|\, \cdots \,|\, y_{n-r}]$ matrisini alalım.

A matrisi $B = P^{-1} A P$ matrisine benzerdir.

$1 \leq i \leq r$ için

$$B \cdot e_i = P^{-1} \cdot A \cdot \underbrace{(P \cdot e_i)}$$

$$= P^{-1} \cdot A \cdot x_i$$

$$= P^{-1} \cdot (\lambda_1 x_i)$$

$$= \lambda_1 \cdot P^{-1} (x_i)$$

$$= \lambda_1 \cdot e_i$$

$$e_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$P \cdot e_i = x_i$

$e_i = P^{-1} x_i$

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & \vdots & \\ 0 & \lambda_1 & & \vdots & \vdots & * \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & \\ 0 & 0 & & \lambda_1 & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & * \\ & & & & \vdots & \end{bmatrix}$$

A ile B benzer matrisler olduğundan

A ve B nin karakteristik polinomları eşittir.

$$P_A(\lambda) = P_B(\lambda) = |\lambda I - B| = \underline{(\lambda-\lambda_1)^r \cdot q(\lambda)}$$

$q(\lambda)$, $(\lambda-\lambda_1)$ çarpanını içerebilir veya içermez.

$$B = \left[\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{\lambda_1 \quad \ddots \quad \lambda_1}}^{r}} & \\ \lambda_1 & & 0 & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 & \\ \hline 0 & & & * \end{array}\right]$$

$$|\lambda I - B| = \left|\begin{array}{ccc} \lambda-\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda-\lambda_1 \end{array}\right|$$

$r \leq \lambda_1$ in cebirsel katlılığı

$\square$

Sonuç: A $n \times n$ tipinde ve karakteristik polino-

mu $\underline{p_A(\lambda)} = (\lambda-\lambda_1)^{c_1} (\lambda-\lambda_2)^{c_2} \cdots (\lambda-\lambda_s)^{c_s}$

λ_1 in cebirsel katlılığı c_1 $\quad$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$ için)

$\vdots$

λ_s $\quad$ " $\quad$ $\underline{+ \quad c_s}$

derece$(p(\lambda)) = c_1 + \dots + c_s = n$

λ_i'e karşılık gelen özvektörlerin sayısı $\leq c_i$

(geom. katlılık)

λ_s $\quad$ " $\quad$ $\leq c_s$

A nın köşegenleştirilebilmesi için gerek ve yeter şart her i için λ_i nin geometrik katlılığı c_i olmasıdır.

$r_1 + \dots + r_s = n$

$c_1 + \dots + c_s = n$

A köşegenleştirilebilir $\Longleftrightarrow$

her λ_i özdeğer için c_i tane özvektör vardır

Örnek: $L: P_2 \to P_2$, $L(at^2+bt+c) = (2a+b+c)t^2 + (2c-3b)t + 4c$

şeklinde tanımlanıyor. L köşegenleştirilebilir midir?

$P^{-1}AP = D$ (köşegen) olur?

P_2 için bir sıralı baz $S = \{t^2, t, 1\}$ olsun.

L nin S e göre temsilcisi

$$A = \Big[\, [L(t^2)]_S \;\Big|\; [L(t)]_S \;\Big|\; [L(1)]_S \,\Big] = \Big[\, [2t^2]_S \;\Big|\; [t^2-3t]_S \;\Big|\; [t^2+2t+4]_S \,\Big]$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ (köşegenleştirilebilir mi?)

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda+3 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+3)(\lambda-4)$$

$$\left[[2t^2]_S \;\middle|\; [t^2-3t]_S \;\middle|\; [t^2+2t+4]_S \right]$$

$\lambda_1=2$, $\lambda_2=-3$, $\lambda_3=4$ özdeğerler.

Özvektörlerin bulunuşu:

$\lambda_1=2$ için $(\lambda_1 I - A)x = 0$

$$(\lambda_1 I - A)x = 0 \iff$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2-2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2-(-3) & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2-4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = \text{serbest} \\ \Rightarrow x_2 = 0 \\ \Rightarrow x_3 = 0 \end{array}$$

$$x = s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -3$ için

$$(\lambda_2 I - A)x = 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} -3-2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3-(-3) & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3-4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = 0$ $\quad -5x_1 - x_2 = 0$

$x_2 = -5x_1$, $x_1 = s$ için $\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2}$

$\lambda_3 = 4$ için: $(\lambda_3 I - A)x = 0 \iff$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4-2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4+3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4-4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$7x_2 = 2x_3 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{7} \cdot x_3$, $x_3 = s$ diyelim.

$$2x_1 = x_2 + x_3 = \frac{2}{7}x_3 + x_3 = \frac{9}{7} \cdot x_3 \Rightarrow x_1 = \frac{9}{14} \cdot x_3$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} 9/14 \\ 2/7 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$P = \left[v_1 \,\vdots\, v_2 \,\vdots\, v_3 \right] \quad \text{için}$$

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Simetrik Matrislerin Köşegenleştirilmesi:

Tanım: $n \times n$ tipindeki A matrisi için $A^T = A$ oluyorsa, A simetriktir denir.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Teorem: Bir reel simetrik matrisin karakteristik polinomunun tüm kökleri reeldir.

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

İspat: A nın karakteristik polinomunun bir kökü λ olsun. (A reel simetrik)

λ bir özdeğer; λ'ya karşılık gelen bir

$0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ için $Ax = \lambda . x$ olur.

λ reel $\iff \lambda = \overline{\lambda}$ $\qquad a+bi = a-bi \Rightarrow b=0$

$\lambda = \overline{\lambda}$:

$Ax = \lambda . x$ eşitliğini $\overline{x}^T$ ile çarparsak,

$$\overline{x}^T . (A x) = \overline{x}^T . (\lambda . x)$$

Her iki tarafın eşlenik transpozu alınırsa

$$\overline{x}^T \overline{A}^T . x = \overline{x}^T . \overline{\lambda}\, x$$

$$\overline{x}^T \underbrace{A . x} = \overline{x}^T . \overline{\lambda} . x$$

$$\overline{x}^T . \lambda . x = \overline{\lambda} . (\overline{x}^T . x)$$

$$\lambda \cdot \underbrace{\bar{x}^T \cdot x}_{\langle x, x \rangle} = \bar{\lambda} (\bar{x}^T \cdot x)$$

$$[\bar{a}_1 \; \dots \; \bar{a}_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\lambda \cdot \langle x, x \rangle = \bar{\lambda} \cdot \langle x, x \rangle$$

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \cdot \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\neq 0} = 0 \implies \lambda - \bar{\lambda} = 0 \implies \lambda = \bar{\lambda}$$

$$\implies \lambda \text{ reel.}$$

$$\underbrace{}\;$$

$$\bar{x}^T \cdot \lambda \cdot x = \bar{\lambda} \cdot (\bar{x}^T \cdot x)$$

$\square$

Sonuç: A bir reel simetrik matris ve özdeğerleri birbirinden farklı ise A (reel sayılar üzerinde) köşegenleştirilebilirdir.

A nın tüm özdeğerleri reel ve birbirinden farklı
$\Rightarrow$ A köşegenleştirilebilirdir.

Teorem: A bir reel simetrik matris ise A nın farklı özdeğerlerine karşılık gelen özvektörleri birbirine diktir.

İspat: A nın λ_1 ve λ_2 gibi farklı iki özdeğerine karşılık gelen iki özvektörü x_1 ve x_2 olsun.

$$\lambda_1 \cdot \langle x_1, x_2 \rangle = \langle \lambda_1 x_1, x_2 \rangle =$$

$$= \langle A \cdot x_1, x_2 \rangle$$

$$= \overline{(Ax_1)}^T \cdot x_2$$

$$= \overline{x_1}^T \cdot \overline{A}^T \cdot x_2$$

$$= \overline{x_1}^T \cdot A \cdot x_2$$

$$= \langle x_1, A x_2 \rangle$$

$$= \langle x_1, \lambda_2 x_2 \rangle$$

$$= \overline{\lambda_2} \cdot \langle x_1, x_2 \rangle$$

$$= \lambda_2 \cdot \langle x_1, x_2 \rangle$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \overline{x_1}^T \cdot x_2$$

$$A x_1 = \lambda_1 \cdot x_1$$

$$A x_2 = \lambda_2 \cdot x_2$$

x_1 ve x_2 $\vec{0}$ değil

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle$$

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \cdot \langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle x_1, x_2 \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ x_1 ve x_2 birbirine diktir

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ köşegenleştirilebilir midir?

$P^{-1} A P = D$

Özdeğerler: $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda+2 & 0 \\ 2 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

2. sütun boyunca kofaktör açılımı:

$$|\lambda I - A| = (\lambda+2).(-1)^{2+2}. \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda+2).(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = (\lambda+2)(\lambda-4)(\lambda+1)$$

$-4 \quad 1$

Özdeğerler: $\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = 4, \ \lambda_3 = -1$

Özvektörler:

$\lambda_1 = -2$ için $\quad (\lambda_1 I - A)x = 0 \iff \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right]$

$$\overset{S_1 + S_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = 0$, $x_1 = 0$, x_2 serbest $\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1}$

$\lambda_2 = 4$ için: $\quad (\lambda_2 I - A)x = 0 \iff$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{6} S_2,\ \frac{1}{2} S_3}{\overset{\frac{1}{4} S_1 \to S_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_2 = 0 \quad x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \,, \quad x_3 = s$ için

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda_3 = -1$ için: $(\lambda_3 I - A)x = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -S_1 \\ \sim \\ \frac{1}{2}S_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} -S_1 + S_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_2 = 0$

$x_1 = 2x_3$

$x_3 = t$ için

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A nın 3 lin. bağımsız özvektörü $\mathbb{R}^3$ için baz olacağından A köşegenleştirilebilirdir

$$P = \left[v_1 \,\vdots\, v_2 \,\vdots\, v_3 \right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ için

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ olur.

$$\boxed{P^{-1} \cdot A \cdot P = D}$$