Geçen haftanın ödevi:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ -6 & -5 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 7 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{boy } L(V) = \text{rank}(L) = \text{rank}\,[L]_S$$

$$[L]_T = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

Alıştırma: $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ -1 & 8 & 2 & 18 \\ 2 & -2 & -4 & -8 \end{bmatrix}$

olmak üzere

$$L(X) = A \cdot X$$

ile tanımlanıyor.

1) Çek(L) için bir baz $= \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

2) Bu bazı $\mathbb{R}^4$ için baz olarak şekilde genişleterek $\mathbb{R}^4$ için bir

$$S = \left\{ \underset{v_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ bazını elde ederiz.

3) $T_1 = \{ L(v_1), L(v_2) \}$; $L(\mathbb{R}^4)$ için bir baz dır.

4) T_1'i $\mathbb{R}^4$ için bir baza genişleterek

$\mathbb{R}^4$ için bir $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

bazı elde ederiz. Böylece L nin

S ve T bazlarına göre temsilcisi

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right]$$

olur. Buradan $\operatorname{rank}(L) = 2$ olduğu görülür.

(Bunu, herkesi ikna edecek şekilde, bütün boşlukları doldurarak, yazınız.!)

Özdeğer ve Özvektörler:

Tanım: V n boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere bir $L : V \to V$ lineer operatör (dönüşüm) verilsin. Sıfırdan farklı bir $x \in V$ için

$$L(\underline{x}) = \lambda \cdot \underline{x}$$

olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ varsa; λ ya L nin bir özdeğeri; x e de L nin λ ya karşılık gelen bir özvektörü denir.

Özdeğer: karakteristik değer, eigen değer

Özvektör: karakteristik vektör, eigen vektör

Örnek: $L: V \to V$, $L(x) = 2 \cdot x$ olsun.

Her x için $L(x) = \underset{\lambda}{2} \cdot x$ sağlandığından,

L nin tek özdeğeri $\lambda = 2$ ve sıfırdan farklı her $x \in V$, λ ya karşılık gelen bir özvektör dür.

Not: $L: V \to V$ için λ bir özdeğerse; λ ya karşılık gelen özvektör tek değildir.

λ L için bir özdeğer ve x, bu özdeğere karşılık gelen bir özvektör olsun.

$L(x) = \lambda \cdot x \; (x \neq \vec{0})$ sağlanıyor.

$x' = c \cdot x \; (c \in \mathbb{R})$ alalım.

$L(x') = L(\underbrace{c \cdot x}) = c \cdot L(x)$

$= c \cdot (\lambda x)$

$= (\lambda) \cdot (\underbrace{c x}_{x'}) = \lambda \cdot x'$

$(c x)$ de λ karşılık özvektör.

Örnek: $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{bmatrix}$ dönüşümünü

ele 1) $x_1 = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}$, $(r \neq 0,\ r \in \mathbb{R})$

$$\underbrace{L(x_1)}_{\Downarrow} = L\left(\begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix} = \underset{\lambda}{1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}}_{x_1}$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 1$ L nin bir özdeğeri, $x_1 = \begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}$ $(r \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

λ_1 e karşılık gelen bir özvektör.

2) $x_2 = \begin{bmatrix} r \\ -r \end{bmatrix}$, $(r \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ için

$$\underbrace{L(x_2)}_{\Downarrow} = L\left(\begin{bmatrix} r \\ -r \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -r \\ r \end{bmatrix} = \underbrace{(-1)}_{\lambda_2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} r \\ -r \end{bmatrix}}_{x_2}$$

$\lambda_2 = -1$, L nin bir özdeğeri

ve $x_2 = \begin{bmatrix} r \\ -r \end{bmatrix}$ $(r \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ λ_2 ye karşılık bir özvektörüdür.

Örnek: $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$

şekl. tanımlanan L lin. dönş. de

1) $u_1 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$, $(r \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ için

$$L(u_1) = L\left(\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{0}_{\lambda} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_1}$$

$L(u_1) = 0 \cdot u_1$

sağlandığından, $\lambda_1 = 0$ L nin bir özdeğeri

ve $u_1 = \begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}$ $(r \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ λ_1 e karşılık

gelen bir öz-vektördür.

2) $L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}, \quad (r \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$

$L(u_2) = L\begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} = 1 \cdot u_2$

$L(u_2) = 1 \cdot u_2$ olduğundan, $\lambda_2 = 1$ L nin bir özdeğeri ve $u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$ $(r \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ L nin λ_2 özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür.

Not: L, n boyutlu V uzayı üzerinde bir lineer operatör, λ bir özdeğeri ve $u \in V$

λ ya karşılık gelen bir özvektörü olsun. V nin herhangi bir S sıralı bazı için:

$$L(u) = \lambda . u$$

$$\underset{\begin{array}{c} \shortparallel \\ A.[u]_S \end{array}}{[L(u)]_S} = [\lambda . u]_S = \lambda . [u]_S$$

(A, L nin S e göre temsilcisi

$$L(u) = \lambda u \iff A[u]_S = \lambda [u]_S$$

Tanım: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ olmak üzere; eğer bir $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq \vec{0}$ için

$$A.x = \lambda.x$$

sağlanacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $\vec{0} \neq x \in \mathbb{R}^n$ varsa, λ ya A matrisinin bir özdeğeri ve x'e A nın λ ya karşılık gelen bir özvektörü denir.

($L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto A.x$ nin dönüşümünün özdeğer ve özvektörleriyle aynıdır.)

Örnek: $L: P_2 \to P_2$, $L(at^2+bt+c) = -bt-2c$

ile tanımlanıyor. P_2 nin $S=\{(1-t),(1+t),t^2\}$

ve $T=\{(t-1),1,t^2\}$ sıralı bazları olsun.

tler bir baza karşılık gelen temsilci yardımıyla

L nin özdeğer-özvektör değerlerini ifade ediniz.

1) L nin, P_2 nin S sıralı bazına göre

temsilcisi:

$$A=\left[\left[L(1-t)\right]_S \,\vdots\, \left[L(1+t)\right]_S \,\vdots\, \left[L(t^2)\right]_S\right] = \left[\left[t-2\right]_S \,\vdots\, \left[-t-2\right]_S \,\vdots\, \left[0\right]_S\right]$$

$$A=\begin{bmatrix} -3/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

λ, L nin özdeğeri ve x karşılık gelen bir özvektörü

$$\iff \quad L(x) = \lambda . x$$

$$\iff \quad A . \underbrace{[x]_s} = \lambda . \underbrace{[x]_s}$$

eşitliğinden bulunabilir.

2) L nin T bazına göre temsilcisi

$$\left[[L(t-1)]_T \,\vdots\, [L(1)]_T \,\vdots\, [L(t^2)]_T \right] = B$$

$$B = \left[[2-t]_T \,\vdots\, [-2]_T \,\vdots\, [0] \right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B'den yararlanarak

$$L(p) = \lambda \cdot p \iff B \cdot [p]_T = \lambda \cdot [p]_T$$

olanı bulunur.

Özdeğer ve Özvektörlerin Hesaplanması:

Tanım: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $n \times n$ matrisi

verilsin

$$\lambda . I_n - A = \begin{bmatrix} \underline{\lambda - a_{11}} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \underline{\lambda - a_{22}} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \underline{\lambda - a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$(1 2 \ldots n)$

matrisinin determinantı, A nın karakteristik polinomu ve $p(\lambda)$'ya

$$p(\lambda) = 0$$

denkleminc A nın karakteristik denklemi $p(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_n)$ denir.

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

determinantında $(\lambda-a_{11}).(\lambda-a_{22})\dots(\lambda-a_{nn})$ çarpımı bulunacağından p, λ nın (başkatsayı 1) bir n. dereceden monik polinomudur.

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1.\lambda^{n-1} + a_2.\lambda^{n-2} + \dots + a_n$$

$$p(0) = \underline{a_n} = \det(0.I - A) = \det(-A) = \underline{(-1)^n.\det(A)}$$

$$-a_1 = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ matrisinin karakt. polinomu ve denkl.nin kökleri?

$$p_A(\lambda) = |\lambda I_3 - A|$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -4 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} \overset{\substack{(\lambda-1)S_2+S_1 \\ -4S_2+S_3}}{=} \begin{vmatrix} 0 & \lambda(\lambda-1)-2 & 2-\lambda \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 4-4\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{(-1)\,.\,(-1)^{2+1}}_{\text{2. sat. kof.}} \cdot \begin{vmatrix} \lambda^2-\lambda-2 & 2-\lambda \\ 4-4\lambda & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 - (8 - 12\lambda + 4\lambda^2)$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = p_A(\lambda)$$

$P_A(\lambda) = 1 \cdot \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$ } A nın karakt. denkl.

(polinomun rasyonel sayılarda bir kökü varsa bu kök tamsayı olur.)

(bu tamsayı sabit terimi böler)

$P(\underset{\alpha}{1}) = 0 \Rightarrow P(\lambda),\ (x - \overset{\alpha}{1})$ e bölünür.

$P(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot q(\lambda)$

$$\begin{array}{l|l} \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 & \lambda - 1 \\ \hline \mp\lambda^3 \pm \lambda^2 & \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ \quad -5\lambda^2 + 11\lambda - 6 & \\ \quad \pm 5\lambda^2 \mp 5\lambda & \\ \hline \qquad 6\lambda - 6 & \\ \qquad 6\lambda - 6 & \end{array}$$

$P_A(\lambda) = (\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 - 5\lambda + 6)$

$= (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$

k. denkl. in kökleri