Köşegenleştirme:

Denklik İlişkisi (Bağıntısı)

V bir küme olsun. V üzerinde bir denklik bağıntısı; aşağıdaki özellikleri sağlayan $V \times V$ nin bir D alt kümesidir.

1) Her $a \in V$ için $(a,a) \in D$ (Yansıma)

2) $(a,b) \in D \Rightarrow (b,a) \in D$ (simetri)

3) $(a,b), (b,c) \in D \Rightarrow (a,c) \in D$. (Geçişkenlik)

Örnek: 1) $\mathbb{R}$ üzerinde eşitlik bağıntısı.

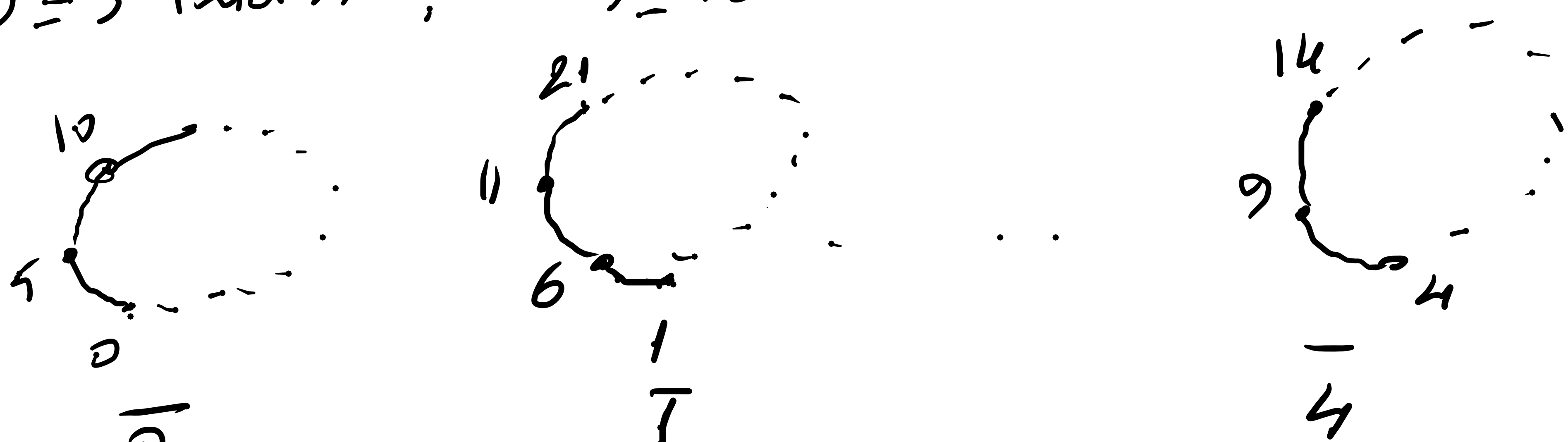
2) $\mathbb{Z}$ üzerinde n pozitif tamsayısı için

$(a,b) \in D \iff n \mid (a-b) \iff a \equiv b \pmod{n}$

V üzerinde bir D denklik bağıntısı varsa birbirine denk elemanların oluşturduğu denklik sınıfları vardır. Bu denklik sınıfları birbirinden ayrıktır ve birleşimleri tüm $V \times V$ yi verir.

Örnek: $n=5$ için $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 'de $(a,b)_n \iff n \mid a-b$

$0 \equiv 5 \pmod{5}$, $\quad 5 \equiv 10 \pmod{5}$



$$\bar{0} = \{ \quad -5,\ 0,\ 5,\ 10,\ \ldots$$

$$\bar{1} = \{ \ldots, -4, 1, 6, 11, \ldots$$

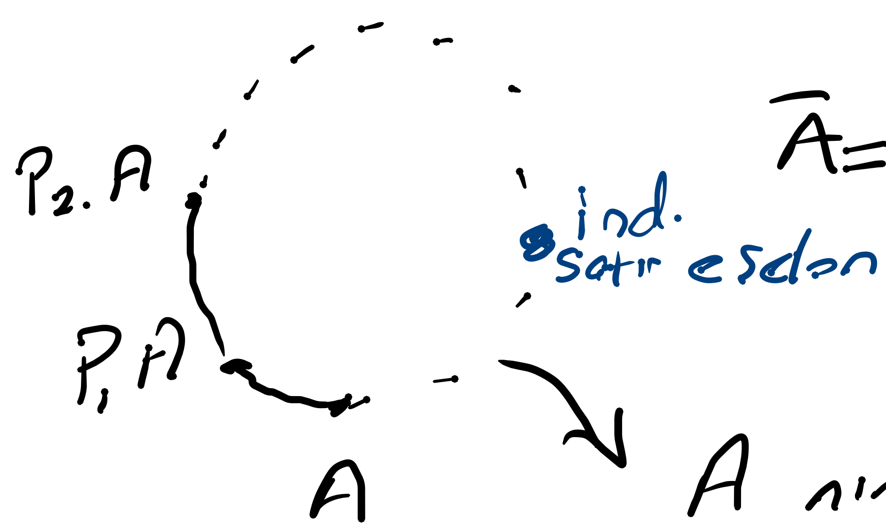
$$\bar{0} \sqcup \bar{1} \sqcup \bar{2} \sqcup \bar{3} \sqcup \bar{4} = \mathbb{Z}$$

1) A ve B $m \times n$ tipinde; eğer ($m \times m$ tipinde) bir $E_1, E_2, \ldots, E_k$ elementer matris dizisi için

$B = \underbrace{E_k \cdots E_2 E_1}_{P} \cdot A$ oluyorsa A satırca B'ye denktir deriz. ($B = P \cdot A$ (P sing. değil))

Satırca denk olma, bir denklik bağıntısıdır.

$\bar{A} = \{ P \cdot A : P$, sing. olmayan $m \times m$ matrisler $\}$



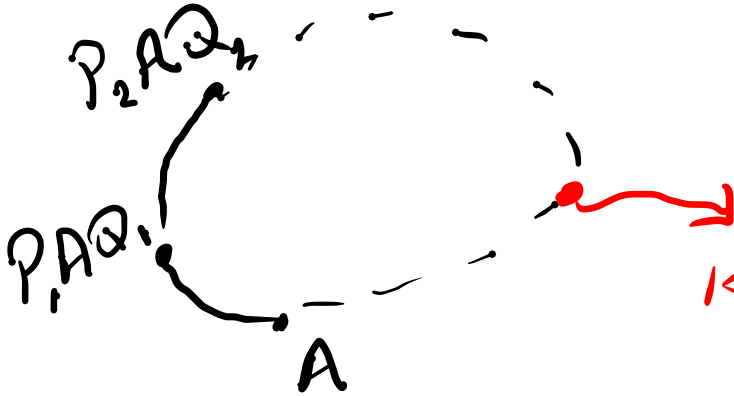
$\to$ A nın indirgenmiş satır eşelon biçimi.

Satırca denkliği belirleyen kanonik eleman, matrisin indirgenmiş eşelon biçimidir.

2) $m \times n$ tipindeki matrisler için soldan $m \times m$ tipinde, sağdan $n \times n$ tipinde singüler olmayan P_m ve Q_n matrisleriyle çarpım, $\mathbb{R}^{m \times n}$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

$$P_m \, A_{m \times n} \cdot Q_n = B \iff B \text{ ile } A \text{ denktirler}$$

(satır ve sütunca)



Kanonik temsilci: $\left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \sim A$

$\text{rank}(A) = r$

Bu bağıntının denklik sınıfları, rank ile belirlenen sınıflardır.

$A \sim B \iff \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$

3) $L : V \to V$ bir lineer dönüşüm, S V nin bir sıralı bazı olsun. L nin S sıralı bazına göre temsilcisi A olsun. T V nin başka bir sıralı bazı ve $P = P_{S \leftarrow T}$ ise L nin T bazına göre temsilcisi

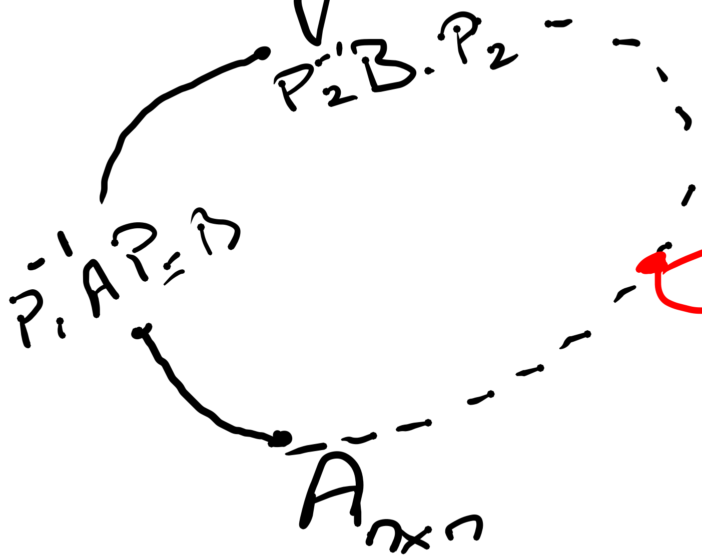
$$B = P^{-1} . A . P$$ olur.

Tanım: A ve B $n \times n$ matrisler ve singüler olmayan bir P için

$$B = P^{-1} A P$$

sağlanıyorsa A B'ye benzerdir denir.

$\mathbb{R}^{n\times n}$ üzerinde benzerlik bir denklik bağıntısıdır.



Kanonik biçim nedir?

$$D=\underbrace{\begin{bmatrix} * & & 0 \\ & * & \\ 0 & & * \end{bmatrix}}_{\text{köşegensel}}$$ (ne zaman

$\bar{A}=\{P^{-1}AP : P \text{ sing. değil}\}$

$\bar{A} \overset{?}{\ni}$ köşegensel, $D=P^{-1}AP$

Köşegenleştirme ve Benzer Matrisler:

Tanım: n boyutlu V vektör uzayı üzerinde bir $L: V \to V$ lineer dönüşümü verilsin. Eğer V nin bir S sıralı bazına göre L nin köşegensel bir temsilcisi varsa L'ye köşegenleştirilebilir bir dönüşümdür denir.

$$L: V_n \longrightarrow V_n$$

öyle bir S bazı olsun ki $[L]_S =$ köşegensel D

Örnek: $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2a_1 - a_3 \\ a_1 + a_2 - a_3 \\ a_3 \end{bmatrix}$

lineer dönüşümünün; $\mathbb{R}^3$ ün $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

sıralı bazına göre temsilcisi?

$$L(s_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$D = \left[\left[L(s_1) \right]_S \,\vdots\, \left[L(s_2) \right]_S \,\vdots\, \left[L(s_3) \right]_S \right]$$

$$L(s_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_S \,\middle|\, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_S \,\middle|\, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}_S \right]$$

$$L(s_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot s_3$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

köşegensel $\Rightarrow$ L köşegenleştirilebilirdir

Teorem: Benzer matrislerin özdeğer kümeleri eşittir.

İspat: A ve B benzer $\Leftrightarrow$ sing. olmayan bir P için $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$

A ve B benzer ve $B = P^{-1} A P$, (P sing. değil)

B nin karakteristik polinomu:

$$q_B(\lambda) = \det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - P^{-1} A P) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det(\underbrace{P^{-1}}\cdot(\underbrace{\lambda I - A})\cdot \underbrace{P}) = \det(P^{-1}) \cdot \det(\lambda I - A) \cdot \det(P)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\det P}} \cdot \det(\lambda I - A) \cdot \cancel{\det P} = \det(\lambda I - A)$$

$$= q_A(\lambda)$$

A ve B nin karakt. polin.ları eşit olduğundan, bu polinomların kökleri (özdeğerleri) aynı kümeyi oluşturur. □

Teorem: n boyutlu bir V vektör uzayı üzerinde bir $L: V \to V$ lin. dönüşümü verilsin. L nin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart V nin L nin özvektörlerinden oluşan bir bazı olmasıdır. Eğer D, V nin bir S sıralı bazına göre L nin köşegensel temsilcisi ise, D nin köşegen üzerindeki değerleri L nin özdeğerleridir.

İspat: ($\Rightarrow$) L köşegenleştirilebilir olsun. Bu durumda V nin öyle bir S sıralı bazı vardır ki $[L]_S$ temsilcisi köşegensel bir D matrisidir.

$$[L]_S = \left[[L(s_1)]_S \,\vdots\, [L(s_2)]_S \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, [L(s_n)]_S \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \lambda_n \\ 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$[L(s_1)]_S = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff L(s_1) = \lambda_1 \cdot s_1 + 0 s_2 + \dots + 0 s_n$$

ve her j için $[L(s_j)] = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \iff L(s_j) = \lambda_j \cdot s_j$

s_j, L nin λ_j özdeğerine karşılık gelen bir özvektörüdür. $\{s_1, s_2, \dots, s_n\} = S$, V için bir sıralı baz; L nin özvektörleri V için bir baz oluşturur.

($\Leftarrow$) L nin özvektörleri V için bir sıralı baz

$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ ise. $(L(s_j) = \lambda_j \cdot s_j.)$

L nin S sıralı bazına göre temsilcisi?

$$[L]_S = \left[[L(s_1)]_S \;\vdots\; [L(s_2)]_S \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; [L(s_n)]_S \right]$$

$$= \left[[\lambda_1 s_1]_S \;\vdots\; [\lambda_2 s_2]_S \;\vdots\; \ldots \;\vdots\; [\lambda_n \cdot s_n]_S \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & & \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \vdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = D \text{ köşegensel}$$

(ve köşegensel terimler özdeğerler.)

Tanım: Bir A matrisi, bir köşegensel D matrisine benzer ise ($P^{-1}AP = D$ olacak şekilde bir sing. olmayan P var) A köşegenleştirilebilirdir denir.

Teorem: $n \times n$ tipindeki bir A matrisinin köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart A nın özvektörlerinin $\mathbb{R}^n$ için bir baz oluşturmasıdır.
A, köşegensel D ye benzer ise D nin köşegensel terimleri A nın özdeğerleridir.

İspat: A köşegenleştirilebilir $\Leftrightarrow$ $P^{-1}AP$ köşegensel olacak şekilde singüler olmayan bir P matrisi vardır

$$\boxed{B.\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1 s_1 + \dots + c_n s_n}$$

$$P^{-1}AP = D \Leftrightarrow$$

$$A.P = P.D \Leftrightarrow$$

$$A.\left[\, p_1 \mid p_2 \mid \dots \mid p_n \,\right] = \left[\, p_1 \mid p_2 \mid \dots \mid p_n \,\right] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\left[\, Ap_1 \mid Ap_2 \mid \dots \mid A.p_n \,\right] = \left[\, \lambda_1 p_1 \mid \lambda_2 p_2 \mid \dots \mid \lambda_n p_n \,\right]$$

$A.p_j = \lambda_j . p_j$ (Her j için) (λ_j, A nın bir özdeğeri ve p_j bir özvektörü)

$[p_1, p_2, \ldots, p_n] = P$ sing. olmayan matrisin sütunları

$\text{rank}(P) = n \Rightarrow \{p_1, \ldots, p_n\}$ lin bağımsız

$\{p_1, \ldots, p_n\}$ $\mathbb{R}^n$ için bir bazdır.

Örnek: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ matrisi köşegenleştirilebilir mi?

(A nın $\mathbb{R}^2$ ye baz olacak özvektör kümesi var mı?

1) A nın özdeğerleri:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4 + 2$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

Özdeğerler: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$

2) Özvektörler:

$\lambda_1 = 2$ için: $(\lambda_1 I - A)x = 0$

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -1 \\ 2 & 2-4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_1 = x_2$ $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = s \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1}$$

v_1, $\lambda_1 = 2$ ye karş. özvektör.

$\lambda_2 = 3$ için:

$(\lambda_2 I - A) \cdot x = 0$

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -1 \\ 2 & 3-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 2s \end{bmatrix}$$

$$= s \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow v_2$$

$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1}$ ve $\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2}$ lin. bağımsızdır

$\{v_1, v_2\}$ $\mathbb{R}^2$ nin özvektörlerden oluşan bazı,

A köşegenleştirilebilir.

$$P = \left[v_1 \,\vdots\, v_2 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

için $P^{-1}AP = D$ olur.

Sağlama: P^{-1} için $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right]$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = D \quad \checkmark$$